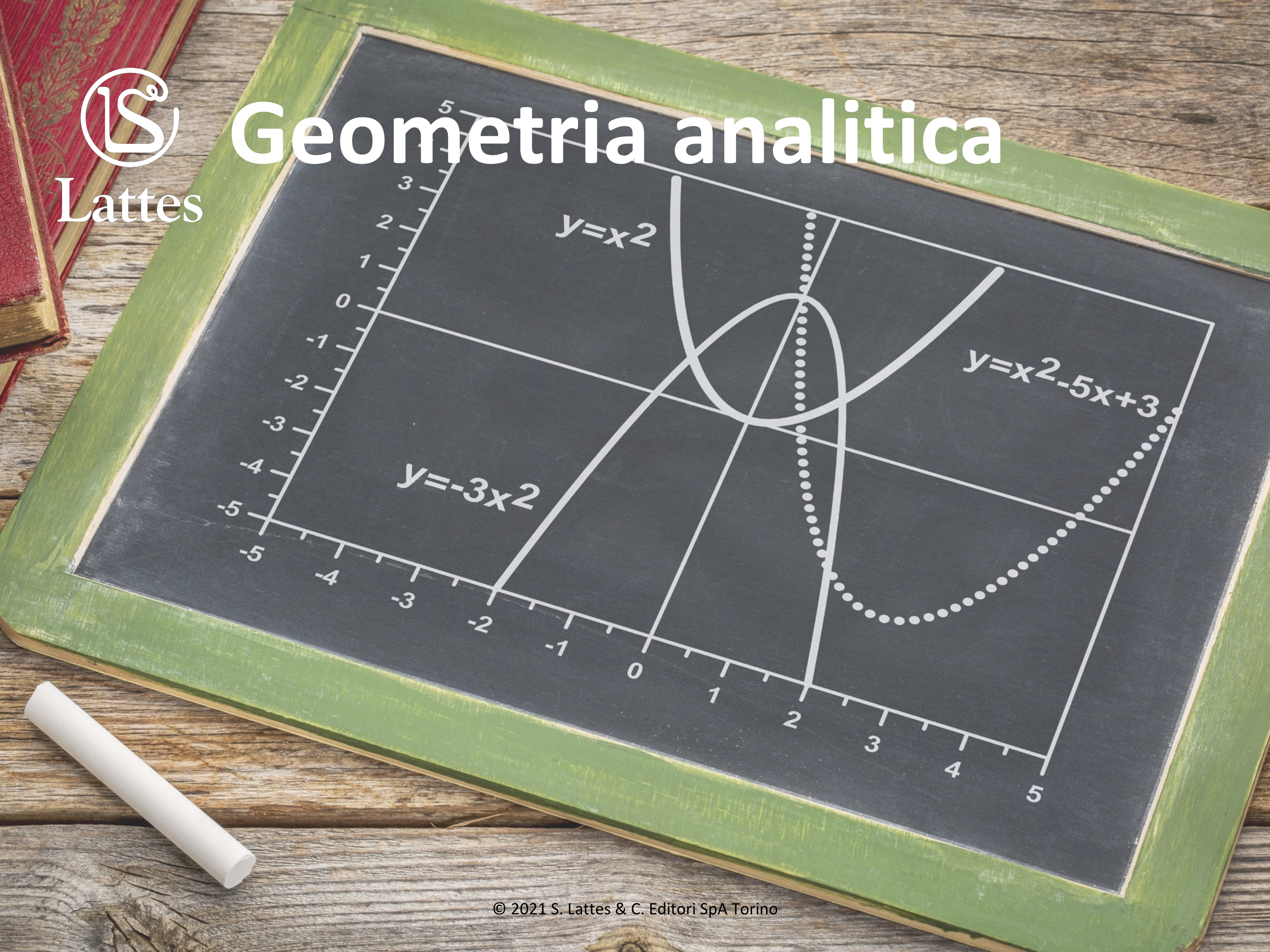
Geometria analitica

Lattes

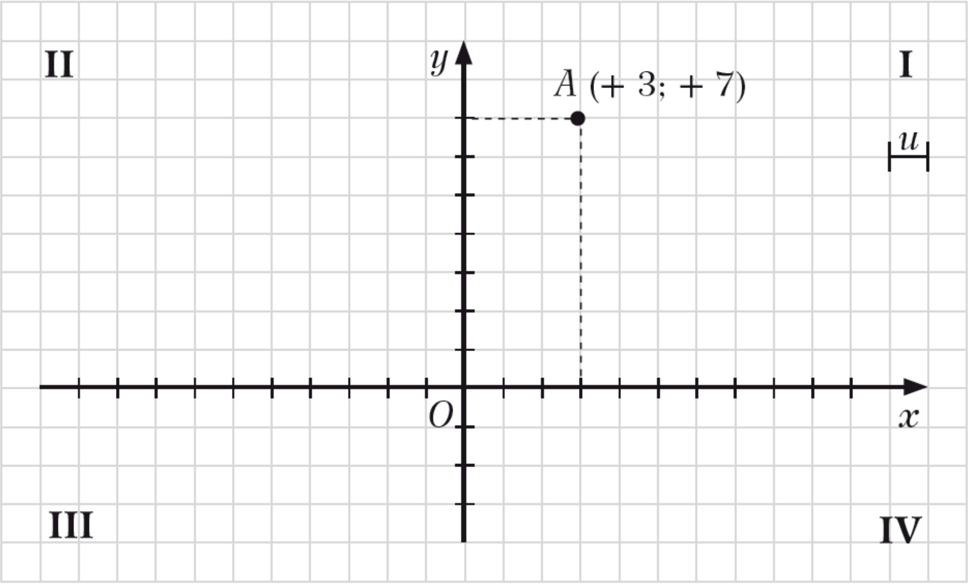


Il piano cartesiano e i numeri relativi

Il **piano cartesiano** è formato da due rette perpendicolari:

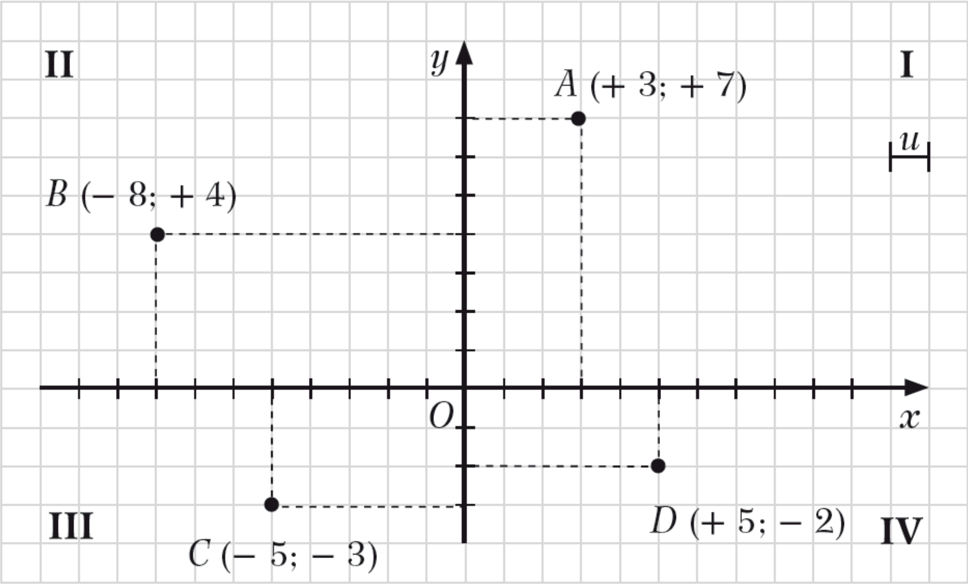
- la retta orizzontale è l'**asse delle ascisse** e si indica con ***x***;
- la retta verticale è l'**asse delle ordinate** e si indica con ***y***.

Ogni punto nel piano cartesiano è individuato da una coppia ordinata di numeri reali, detti **coordinate del punto**.



Il piano cartesiano e i numeri relativi

Gli assi cartesiani dividono il piano in quattro quadranti, che vengono numerati in senso antiorario a partire da quello in alto a destra.



I quadrante: *A* (+ 3; + 7) ascissa positiva; ordinata positiva.

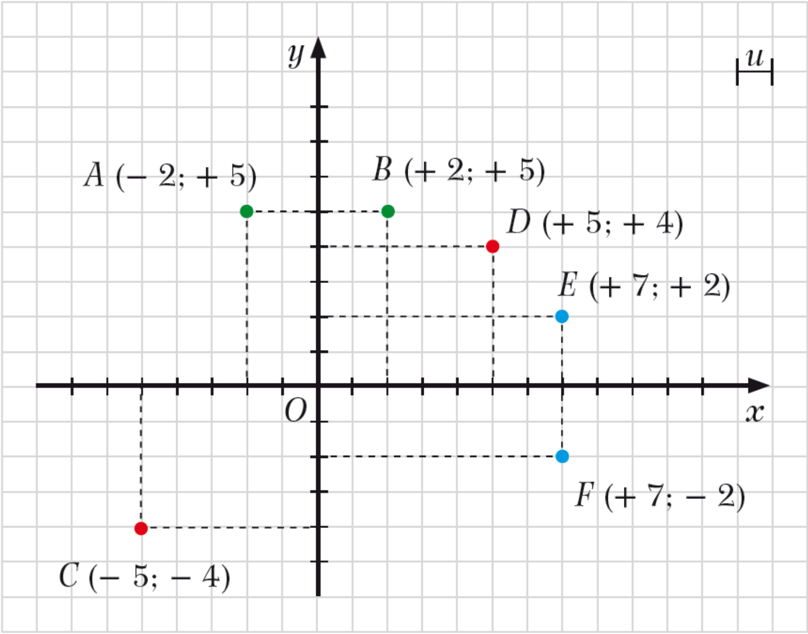
II quadrante: *B* (− 8; + 4) ascissa negativa; ordinata positiva.

III quadrante: *C* (− 5; − 3) ascissa negativa; ordinata negativa.

IV quadrante: *D* (+ 5; − 2) ascissa positiva; ordinata negativa.

Il piano cartesiano e i numeri relativi

PUNTI SIMMETRICI



I punti ***A*** e ***B*** hanno ascisse opposte e ordinate uguali: sono **simmetrici rispetto all’asse *y***.

I punti ***C*** e ***D*** hanno ascisse e ordinate opposte: sono **simmetrici rispetto all’origine *O* degli assi**.

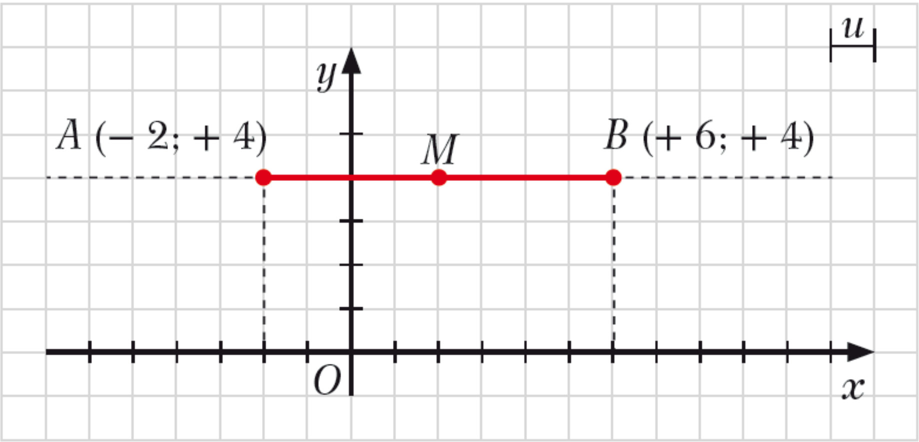
I punti ***E*** ed ***F*** hanno ascissa uguale e ordinate opposte: sono **simmetrici rispetto all’asse *x***.

Segmenti nel piano cartesiano

SEGMENTI PARALLELI ALL'ASSE *X*

La misura della distanza fra due punti *A* e *B* aventi uguale ordinata è il valore assoluto della differenza fra le ascisse dei due punti:

$$AB = |x_A - x_B| = |x_B - x_A|$$



Le **coordinate del punto medio *M* del segmento *AB*** sono le seguenti:

- l'**ascissa** è data dalla semisomma delle ascisse di *A* e di *B*:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

- l'**ordinata** è la stessa per tutti i punti del segmento *AB.*

Segmenti nel piano cartesiano

SEGMENTI PARALLELI ALL'ASSE *Y*

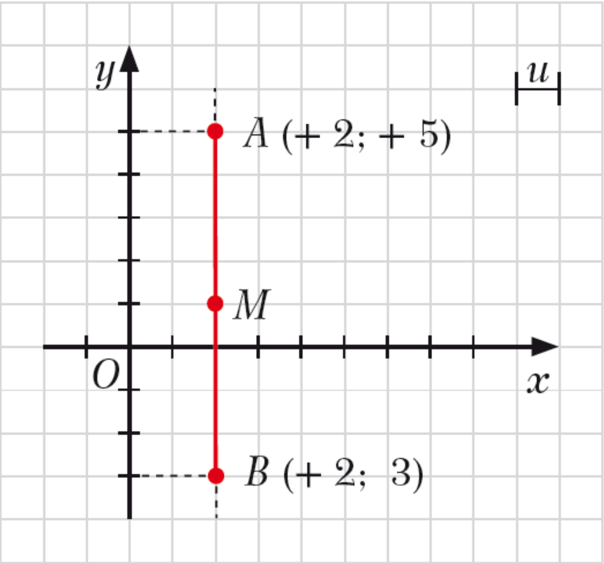
La misura della distanza fra due punti *A* e *B* aventi uguale ascissa è il valore assoluto della differenza fra le ordinate dei due punti:

$$AB = |y_A - y_B| = |y_B - y_A|$$

Le **coordinate del punto medio *M* del segmento *AB*** sono le seguenti:

- l'**ascissa** è la stessa per tutti i punti del segmento *AB;*
- l'**ordinata** è data dalla semisomma delle ordinate di *A* e di *B*:

$$y_M = \frac{y_A + yB}{2}$$

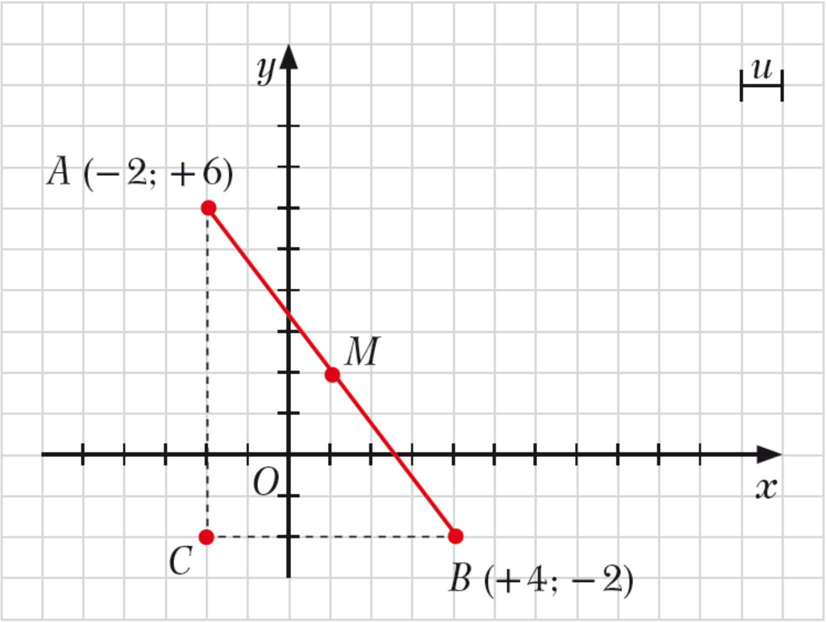


Segmenti nel piano cartesiano

SEGMENTI AVENTI PER ESTREMI PUNTI CON ASCISSE E ORDINATE DIVERSE

La **misura della distanza** fra due generici punti *A* e *B* del piano cartesiano si ottiene calcolando la radice quadrata della somma del quadrato della differenza fra le ascisse dei due punti e del quadrato della differenza fra le loro ordinate:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



Le **coordinate del punto medio *M* di un segmento *AB*** sono date rispettivamente dalla semisomma delle ascisse e dalla semisomma delle ordinate degli estremi del segmento:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Una funzione di 1° grado: la retta

Una grandezza si dice **variabile** quando può assumere valori diversi.

Consideriamo due grandezze variabili x e y: ***y* è funzione di *x*** quando a ogni valore assegnato alla prima corrisponde un solo e ben determinato valore per l'altra:

si scrive $\boldsymbol{y = f(x)}$

- $\boldsymbol{x}$ è la **variabile indipendente**;
- $\boldsymbol{y}$ è la **variabile dipendente**.

Una funzione del tipo $\boldsymbol{y = kx + q}$ si dice **funzione di primo grado**.

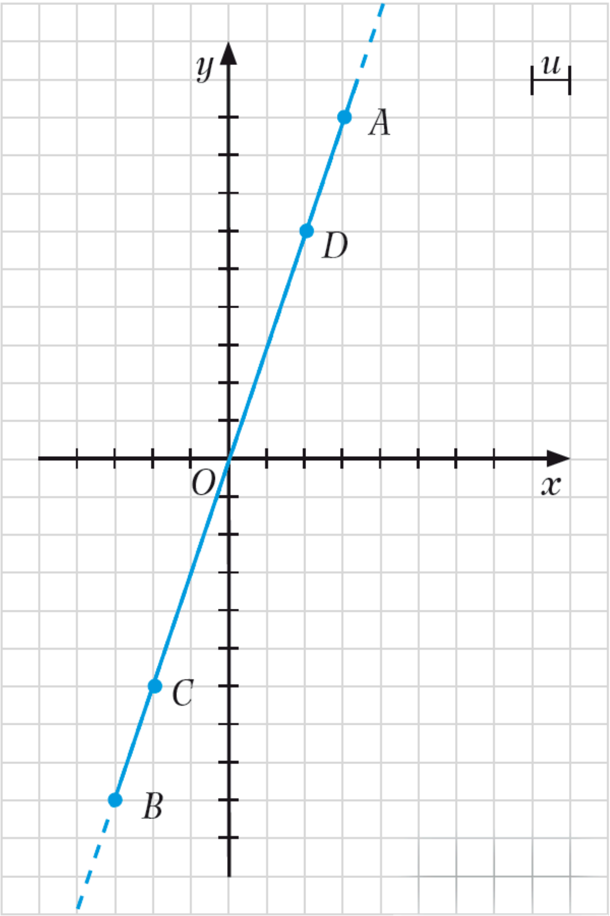
Una funzione di 1° grado: la retta

RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE DEGLI ASSI

La rappresentazione grafica di una funzione di primo grado di equazione:

$$y = mx \quad (m \in \mathbf{R})$$

è una **retta passante per l'origine degli assi**.



Una funzione di 1° grado: la retta

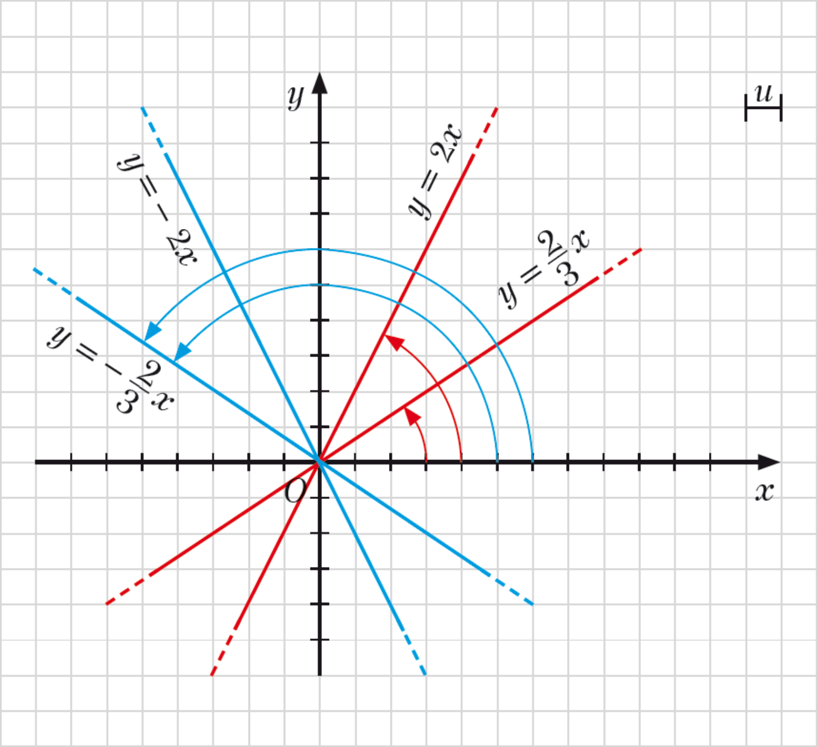
COEFFICIENTE ANGOLARE

La funzione $y = mx$ ($m \in \mathbf{R}$) è rappresentata nel piano cartesiano da una retta passante per l'origine.

Ricaviamo $m = \frac{y}{x}$ e dal suo valore dipende l'inclinazione della retta rispetto all'asse x, cioè l'angolo che la retta forma con l'asse x.

Per questo motivo ***m*** è detto **coefficiente angolare**:

- se $\boldsymbol{m > 0}$ il suo diagramma è una retta passante per l'origine che giace nel I e nel III quadrante;
- se $\boldsymbol{m < 0}$ il suo diagramma è una retta passante per l'origine che giace nel II e nel IV quadrante.



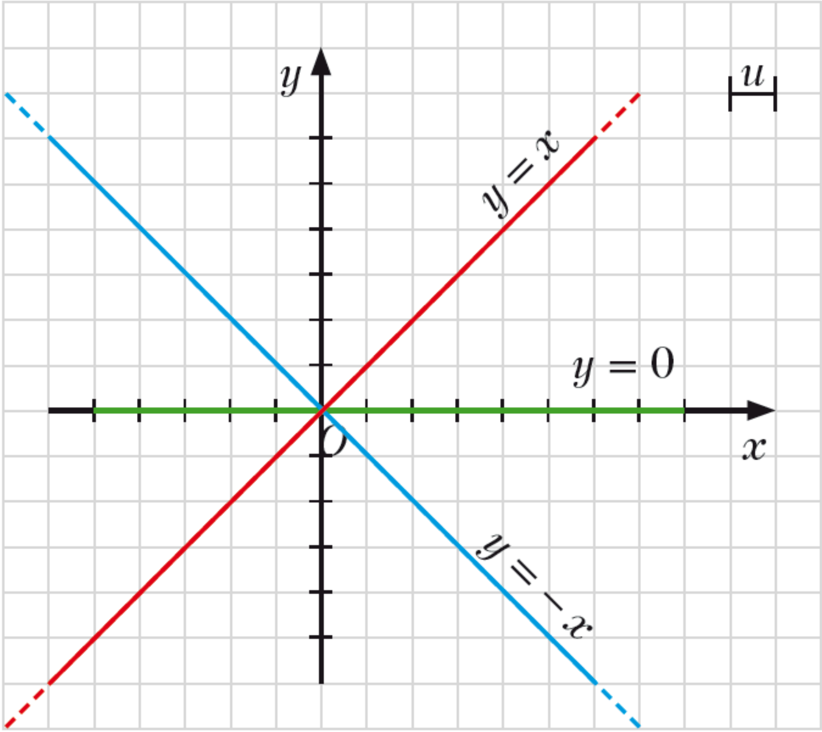
Lattes

Una funzione di 1° grado: la retta

- Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$ l’equazione della retta è: $y = x$
  La retta è la bisettrice del I e III quadrante.

- Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{-1}$ l’equazione della retta è: $y = -x$
  La retta è la bisettrice del II e IV quadrante.

- Se $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$ l’equazione della retta è: $y = 0$
  La retta coincide con l’asse delle *x*.



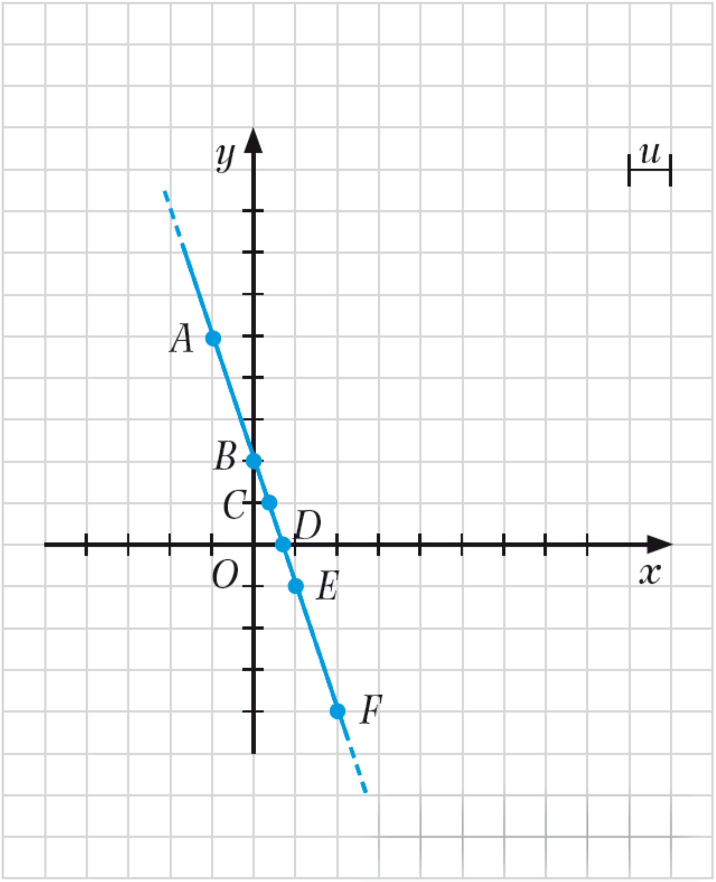
Una funzione di 1° grado: la retta

RETTA GENERICA

In una equazione del tipo $\boldsymbol{y = mx + q}$:

- $\boldsymbol{m}$ è il **coefficiente angolare** e individua l'inclinazione della retta;
- $\boldsymbol{q}$ è il **termine noto** e rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse *y*;
- se $\boldsymbol{q = 0}$ la retta passa per l'origine degli assi.

Ogni equazione del tipo $y = mx + q$ (con $m \neq 0$ e $q \neq 0$) è l'equazione di una retta del piano non passante per l'origine degli assi e che interseca l'asse *y* nel punto di ordinata *q*.



Equazioni di rette particolari

RETTE PARALLELE ALL'ASSE *X*

L'equazione di una **retta parallela all'asse x** è del **tipo $y = k$** dove k indica l'ordinata di tutti i punti della retta:

- se $k > 0$ la retta giace nel I e nel II quadrante;
- se $k < 0$ la retta giace nel III e nel IV quadrante;
- se $k = 0$ la retta coincide con l'asse x e $y = 0$ è l'equazione dell'asse x.

RETTE PARALLELE ALL'ASSE *Y*

L'equazione di una **retta parallela all'asse y** è del **tipo $x = k$** dove k indica l'ascissa di tutti i punti della retta:

- se $k > 0$ la retta giace nel I e nel IV quadrante;
- se $k < 0$ la retta giace nel II e nel III quadrante;
- se $k = 0$ la retta coincide con l'asse y e $x = 0$ è l'equazione dell'asse y.

Equazioni di rette particolari

RETTE TRA LORO PARALLELE

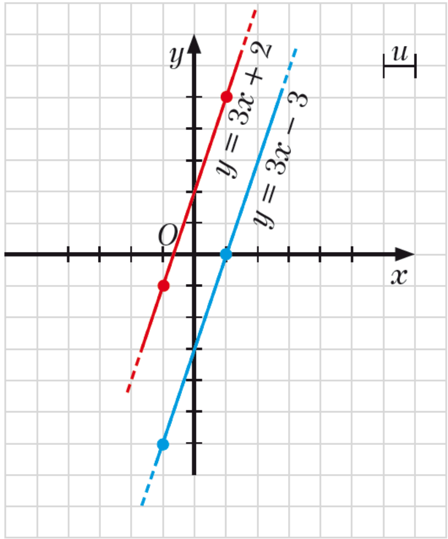
Due rette *r* e *s* che hanno lo stesso coefficiente angolare sono parallele.

Le rette

$r: y = mx + q \qquad s: y = m'x + q'$

sono parallele (e si scrive ***r // s***) se e solo se:

$m = m'$



RETTE TRA LORO PERPENDICOLARI

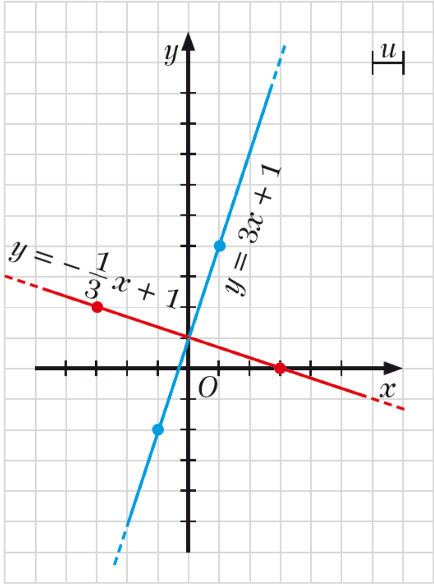
Due rette *r* e *s* che hanno per coefficienti angolari due numeri relativi opposti e reciproci sono perpendicolari.

Le rette

$r: y = mx + q \qquad s: y = m'x + q'$

sono perpendicolari (e si scrive $\boldsymbol{r \perp s}$) se e solo se:

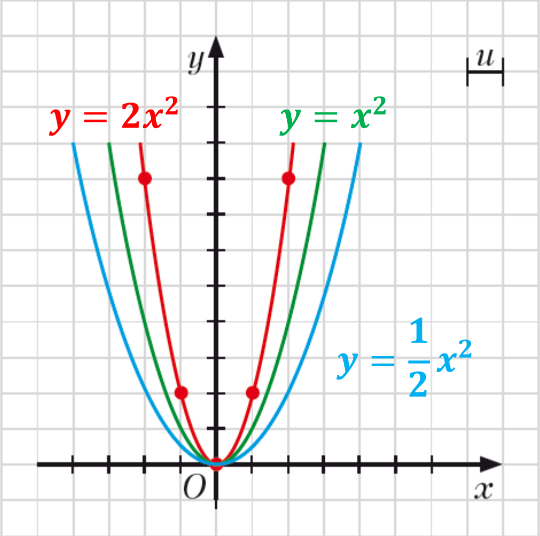
$$m = -\frac{1}{m'} \text{ oppure } m \cdot m' = -1$$

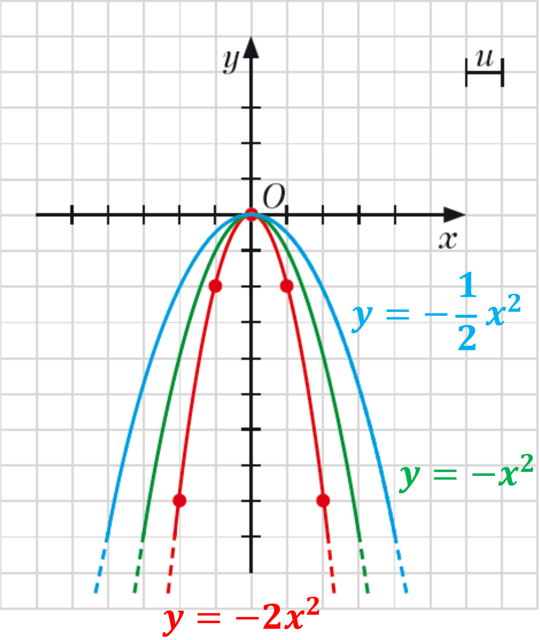


Funzioni quadratiche

RAPPRESENTAZIONE DELLA FUNZIONE $y = ax^2$

La funzione $\boldsymbol{y = ax^2}$ (con $a \neq 0$) rappresenta una **parabola** con il vertice nell'origine degli assi.





Possiamo distinguere due casi:

- se $\boldsymbol{a > 0}$ la parabola ha la concavità verso l'alto;
- se $\boldsymbol{a < 0}$ la parabola ha la concavità verso il basso.

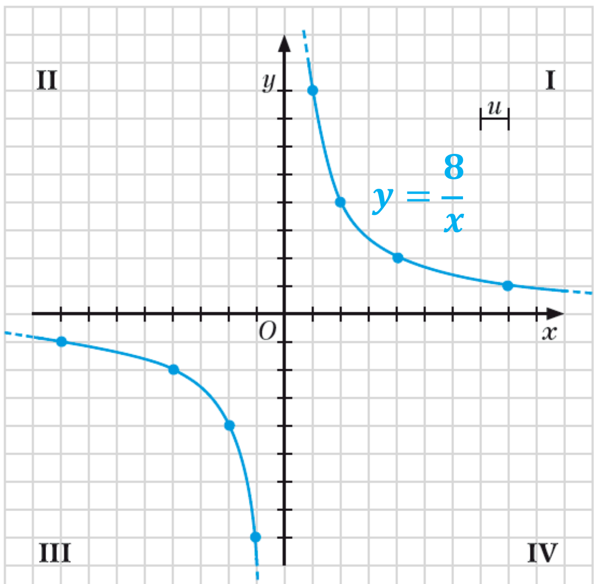
Il coefficiente $\boldsymbol{a}$ si chiama **coefficiente di dipendenza quadratica.**

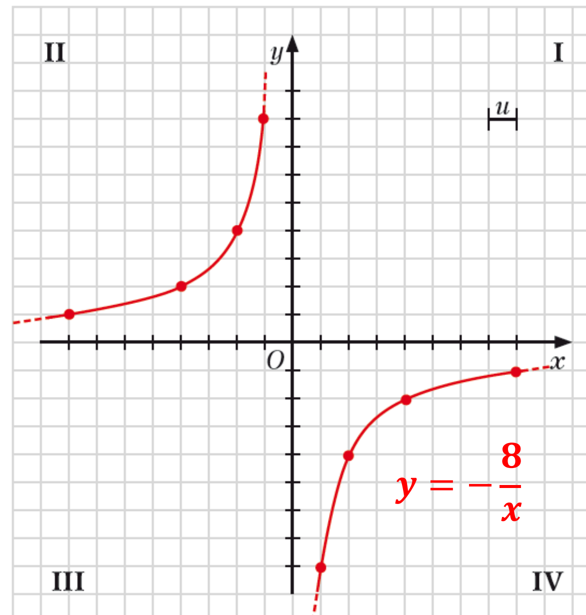
Quanto maggiore è il coefficiente a in valore assoluto tanto più le parabole sono strette.

Funzioni quadratiche

RAPPRESENTAZIONE DELLA FUNZIONE $y = \frac{k}{x}$

La funzione $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ (con k, $x \neq 0$) rappresenta un'**iperbole equilatera**, formata da due parti dette **rami dell'iperbole**.





Possiamo distinguere due casi:

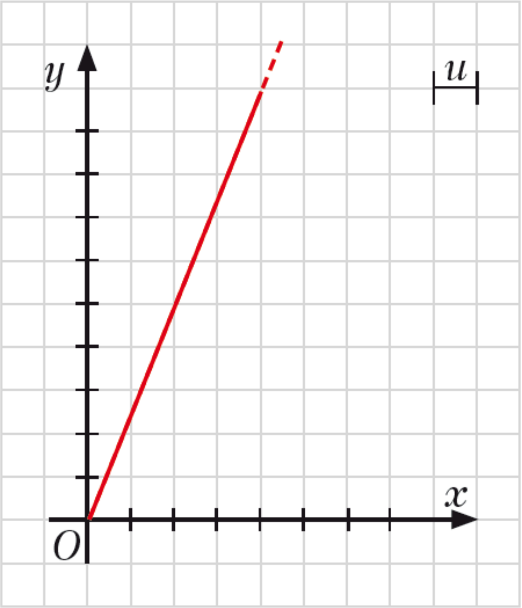
- se $\boldsymbol{k > 0}$ l'iperbole giace nel I e III quadrante;
- se $\boldsymbol{k < 0}$ l'iperbole giace nel II e IV quadrante.

Proporzionalità e grafici

Due grandezze variabili x e y sono **direttamente proporzionali** se il rapporto tra due valori corrispondenti è costante:

$$\frac{y}{x} = k$$

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una **retta** di equazione $y = kx$ (con $k \neq 0$) che passa per l'origine.



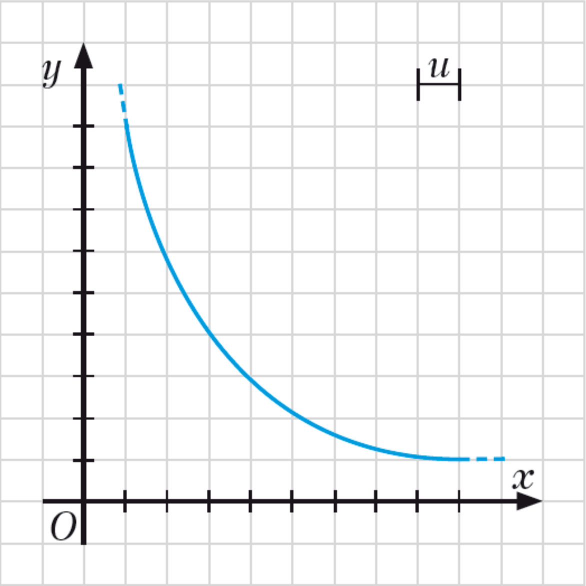
Lattes

Proporzionalità e grafici

Due grandezze variabili x e y sono **inversamente proporzionali** quando il prodotto di due valori corrispondenti è costante:

$$y \cdot x = k$$

Il grafico di una funzione di proporzionalità inversa è un'**iperbole equilatera** di equazione $y = \frac{k}{x}$ (con k, $x \neq 0$).



Proporzionalità e grafici

Due grandezze variabili x e y sono legate da una **proporzionalità quadratica** quando il rapporto tra il valore di una grandezza e il quadrato del corrispondente valore dell'altra è costante:

$$\boldsymbol{y = k \cdot x^2}$$

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una **parabola** di equazione $\boldsymbol{y = kx^2}$ (con $k \neq 0$) che ha il vertice nell'origine degli assi ed è simmetrica rispetto all'asse y.